Lekcija 5: *Sinteza MIMO regulatora*

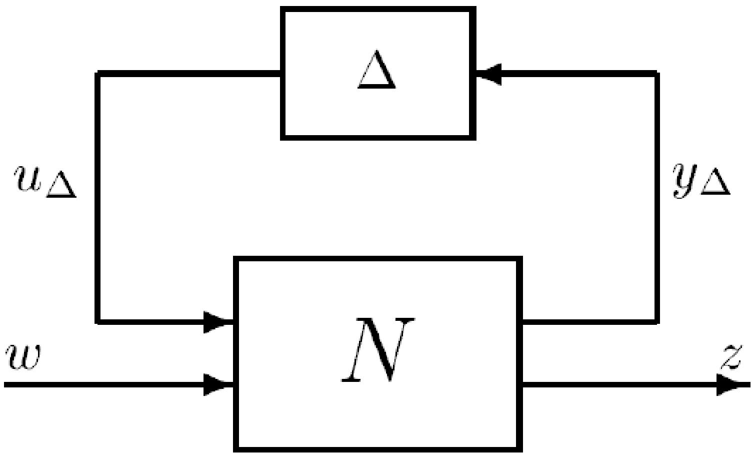
Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013

Opća upravljačka konfiguracija

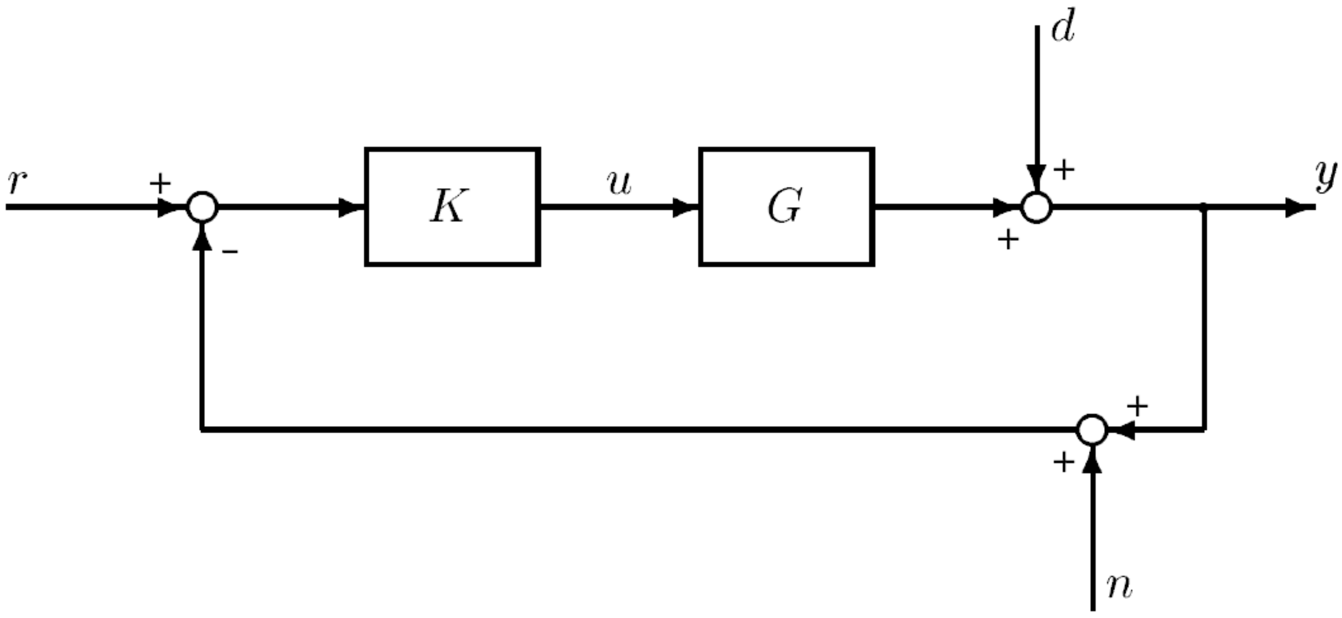
- **Opća upravljačka konfiguracija sa neizvjesnošću i regulatorom**



- **Ciljevi:**
- **Definirati *N*(*s*) koji će oslikavati svojstva zatvorene petlje.**
- **Odrediti *K*(*s*) da se postigne željeni *N*(*s*).**

Opća upravljačka konfiguracija

Sistem upravljanja sa 1-DOF



- Izlaz $\boldsymbol{y}$, upravljački ulaz $\boldsymbol{u}$ i pogreška $\boldsymbol{e}$ dani su sa:

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{r}(s) + \boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{d}(s) - \boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{n}(s)$$

$$\boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{S}(s)[\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{n}(s) - \boldsymbol{d}(s)]$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{S}(s)\boldsymbol{d}(s) + \boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{n}(s)$$

Opća upravljačka konfiguracija

- Zahtjevi koji se postavljaju na $\boldsymbol{K}$, u smislu stabilizacije $\boldsymbol{G}$-a, su:
  - Eliminiranje smetnje $\Rightarrow$ učiniti $\bar{\sigma}(\boldsymbol{S})$ malim.
  - Prigušenje šuma $\Rightarrow$ načiniti $\boldsymbol{T}$ malim.
  - Slijeđenje referentne veličine $\Rightarrow$ $\bar{\sigma}(\boldsymbol{T}) \approx \underline{\sigma}(\boldsymbol{T}) \approx 1$
  - Redukcija stanja ulaza (energije) $\Rightarrow$ načiniti $\bar{\sigma}(\boldsymbol{KS})$ malim.
  - Robusna stabilnost u prisustvu aditivne perturbacije $\Rightarrow$ načiniti $\bar{\sigma}(\boldsymbol{KS})$ malim.
  - Robusna stabilnost u prisustvu izlazne multiplikativne neizvjesnosti $\Rightarrow$ načiniti $\bar{\sigma}(\boldsymbol{T})$ malim.
- Ovi zahtjevi se ne mogu zadovoljiti istovremeno, tj. postoje konfliktni ciljevi pri dizajnu regulatora.

Opća upravljačka konfiguracija

- Dizajn regulatora uključuje kompromis između navedenih konfliktnih ciljeva:
  - **Sinteza**: formulacija i rješavanje problema optimizacije.
  - **Oblikovanje petlje** (engl. Loop-shaping): “ručno” oblikovanje otvorene petlje pojačanja.

Opća upravljačka konfiguracija

- Prethodni zahtjevi su se odnosili na zatvorenu petlju, ovdje imamo posla sa oblikovanjem otvorene petlje.
- Klasično oblikovanje petlje – oblikovanje otvorene petlje $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{GK}$, zahtijeva se:

$$\boxed{\underline{\sigma}(\boldsymbol{L}) - 1 \leq \frac{1}{\overline{\sigma}(\boldsymbol{S})} \leq \underline{\sigma}(\boldsymbol{L}) + 1}$$

- Na frekvencijama gdje je $\underline{\sigma}(\boldsymbol{L}) >> 1$ imamo $\overline{\sigma}(\boldsymbol{S}) \approx 1/\underline{\sigma}(\boldsymbol{L})$
- Na frekvencijama gdje je $\underline{\sigma}(\boldsymbol{L}) << 1$ imamo $\overline{\sigma}(\boldsymbol{T}) \approx \overline{\sigma}(\boldsymbol{L})$
- Na frekvenciji ω_B $(1/\overline{\sigma}(\boldsymbol{S}(j\omega_B)) = \sqrt{2} \approx 1.41)$ imamo:

$$0.41 \leq \underline{\sigma}(\boldsymbol{L}(j\omega_B)) \leq 2.41$$

Opća upravljačka konfiguracija

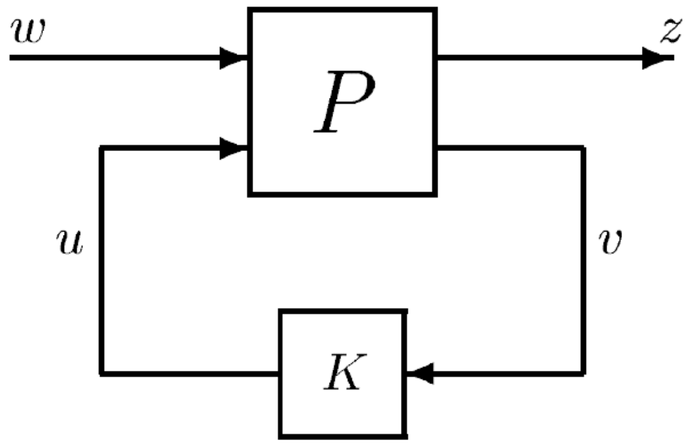
- Preko specificiranog frekvencijskog područja mogu se aproksimirati zahtjevi zatvorene petlje sa zahtjevima koji se odnose na otvorenu petlju:
  - Za **eliminiranje smetnje** učiniti $\underline{\sigma}(GK)$ velikim; ispravno za frekvencije na kojim je $\underline{\sigma}(GK) >> 1$
  - Za **prigušenje šuma** načiniti $\bar{\sigma}(GK)$ malim; ispravno za frekvencije gdje je $\bar{\sigma}(GK) << 1$
  - Za **slijeđenje reference** učiniti $\underline{\sigma}(GK)$ velikim; vrijedi za frekvencije na kojima je $\underline{\sigma}(GK) >> 1$
  - Za **robusnu stabilnost** na aditivne perturbacije učiniti $\bar{\sigma}(K)$ malim; vrijedi za frekvencije na kojima je $\bar{\sigma}(GK) << 1$
  - Za **robusnu stabilnost** na multiplikativne izlazne perturbacije učiniti $\bar{\sigma}(GK)$ malim $(\bar{\sigma}(GK) << 1)$

Opća upravljačka konfiguracija

- Zahtjevi 1. i 3. su validni i važni na niskim frekvencijama, tj, $0 \leq \omega \leq \omega_l \leq \omega_B \leq \infty$.
- Zahtjevi 2., 4., 5. i 6. su uvjeti koji su ispravni i važni na visokim frekvencijama, tj. $\omega_B \leq \omega_h \leq \omega \leq \infty$.
- Na frekvencijama na kojima se želi veliki iznos pojačanja (niske frekvencije), “najlošiji slučaj” pravca je povezan sa $\underline{\sigma}(\boldsymbol{L})$.
- Na frekvencijama gdje se želi postići mali iznos pojačanja (visoke frekvencije) “najlošiji slučaj” pravca je povezan sa $\bar{\sigma}(\boldsymbol{L})$.

Opća upravljačka konfiguracija

Opći problem upravljanja bez neizvjesnosti



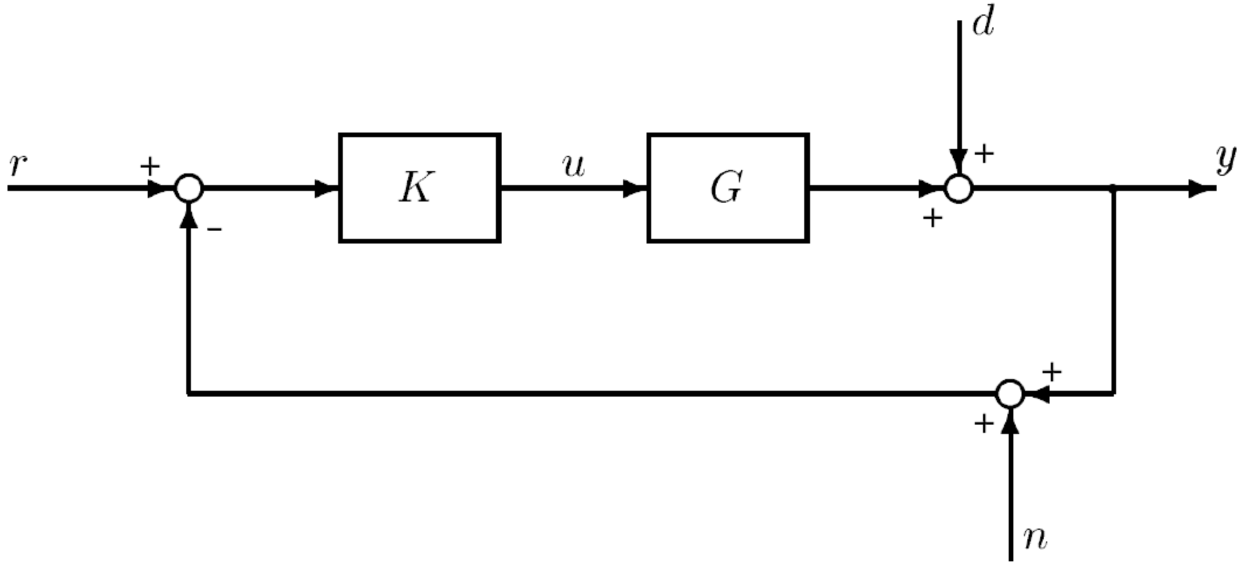
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K})\boldsymbol{w}$$

- Sinteza regulatora: $\boxed{\min_{\boldsymbol{K}} \|\boldsymbol{F}\|_m}$
- $m = 2$ imamo H_2-optimalno upravljanje,
- $m = \infty$ imamo H_∞-optimalno upravljanje.
- Rješenje zasnovano na modelu $\boldsymbol{P}(s)$.

Opća upravljačka konfiguracija

Određivanje P(s) – pristup zasnovan na signalu

- Formulacija ovog pristupa: minimizirati otežanu pogrešku upravljanja $\boldsymbol{e}$ i upravljački ulaz $\boldsymbol{u}$ u prisustvu reference $\boldsymbol{r}$ i poremećaja (smetnje) $\boldsymbol{d}$.



- Vektor ulaza $\boldsymbol{w}$ i vektor $\boldsymbol{z}$ su:

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_P \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{W}_u \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

Opća upravljačka konfiguracija

- U otvorenoj petlji ($\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$) imamo:

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{W}_P \boldsymbol{e} = \boldsymbol{W}_P (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{W}_P (\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{W}_u \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}$$

- Na temelju ovih izraza slijedi izraz za $\boldsymbol{P}(s)$:

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_P(s)\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{W}_P(s)\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{W}_P(s)\boldsymbol{G}(s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{W}_u(s)\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{G}(s) \end{bmatrix}$$

Opća upravljačka konfiguracija

Određivanje P(s) – oblikovanje funkcija prijenosa

- Razmatra se oblikovanje funkcija prijenosa zatvorene petlje, $\boldsymbol{S}$ i $\boldsymbol{T}$, rješavanjem problema optimizacije:

$$\boxed{\min_{K}\left\|\begin{bmatrix} W_P \boldsymbol{S} \\ W_T \boldsymbol{T} \end{bmatrix}\right\|_m \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K}) = \begin{bmatrix} W_P \boldsymbol{S} \\ W_T \boldsymbol{T} \end{bmatrix}}$$

- Signali $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{z}$ odabiru se tako da je:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} W_P \boldsymbol{S} \\ W_T \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

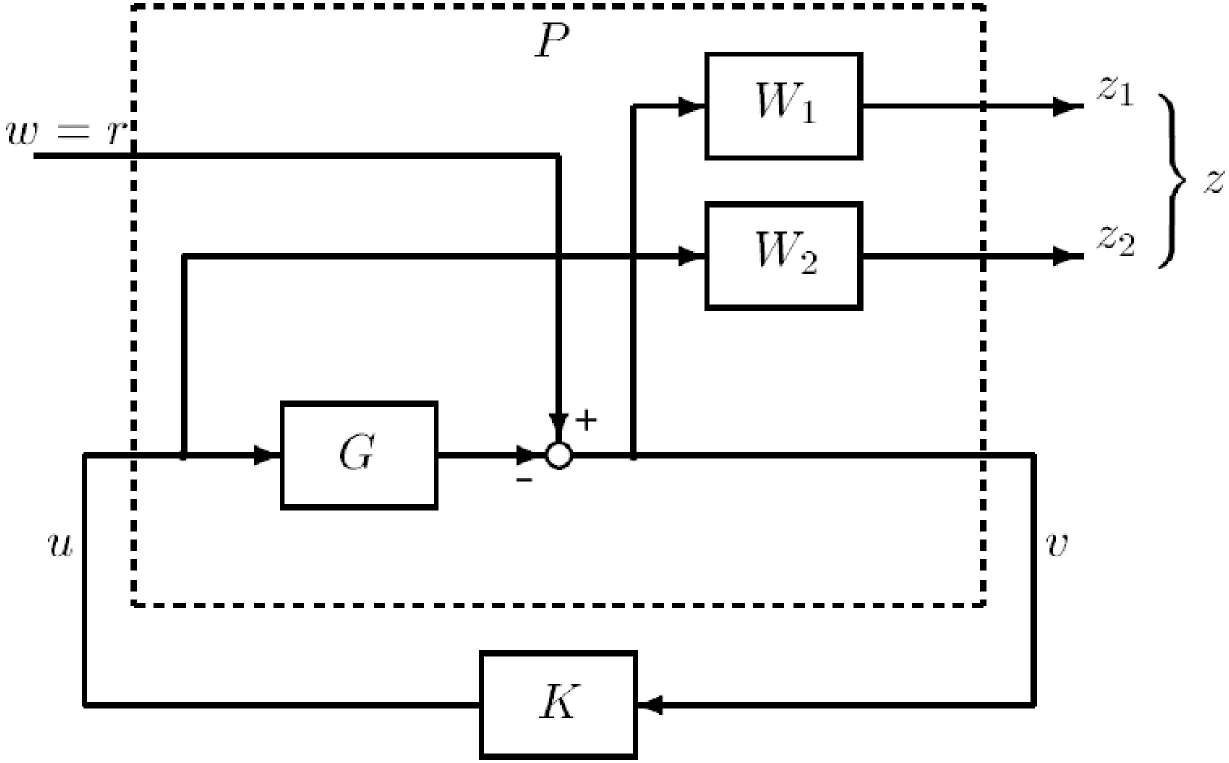
- Budući da je $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Sd}$ i $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{Td}$, odabiremo:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}; \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} W_P \boldsymbol{e} \\ W_T (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{d}) \end{bmatrix}$$

Opća upravljačka konfiguracija

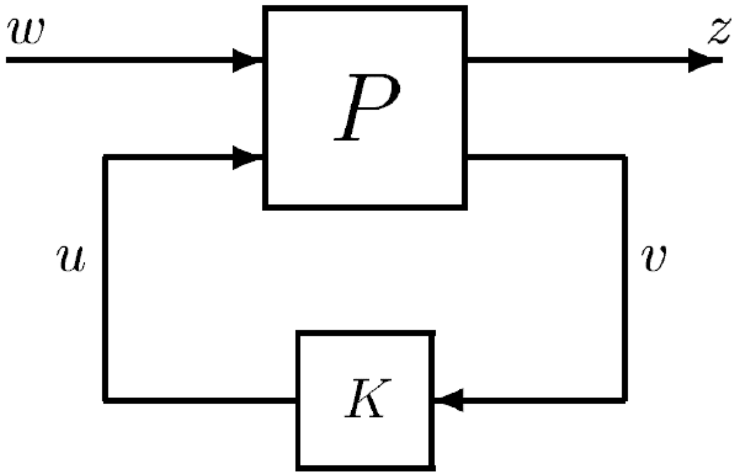
- Korištenjem prethodnih izraza dobiva se:

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{W}_P(s)\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{W}_P(s)\boldsymbol{G}(s) \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W}_T(s)\boldsymbol{G}(s) \\ -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{G}(s) \end{bmatrix}$$



Sinteza regulatora

- Opća upravljačka struktura



$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}(s)\begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11}(s) & \boldsymbol{P}_{12}(s) \\ \boldsymbol{P}_{21}(s) & \boldsymbol{P}_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{v}$$

- Realizacija generaliziranog procesa $\boldsymbol{P}(s)$ u prostoru stanja:

$$\boldsymbol{P} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \hline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} \end{array}\right]$$

Sinteza regulatora

- Funkcija prijenosa zatvorenog sistema od $\boldsymbol{w}$ prema $\boldsymbol{z}$ dana je linearnom frakcijskom transformacijom:

$$\boxed{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K})\boldsymbol{w}}$$

gdje je:

$$\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{P}_{21}$$

- H_2 i H_∞ upravljanja uključuju minimiziranje H_2 i H_∞ normi od $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K})$.
- Oba upravljanja zahtijevaju rješavanje **dvije Riccatijeve jednadžbe**, njihovi regulatori imaju **dimenziju stanja jednaku dimenziji generaliziranog procesa** $\boldsymbol{P}$ i oba regulatora imaju separiranu strukturu.

Sinteza regulatora

- Algebarske Riccatijeve jednadžbe (ARE) su oblika:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}}$$

- Standardni algoritmi za rješavanje H_2 i H_∞ optimalnih upravljačkih problema zasnivaju se na realizaciji generaliziranog procesa $\boldsymbol{P}(s)$ u prostoru stanja:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix}}$$

  gdje je $[\boldsymbol{w}\ \boldsymbol{u}]^T$ ulaz i $[\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{v}]^T$ izlaz.

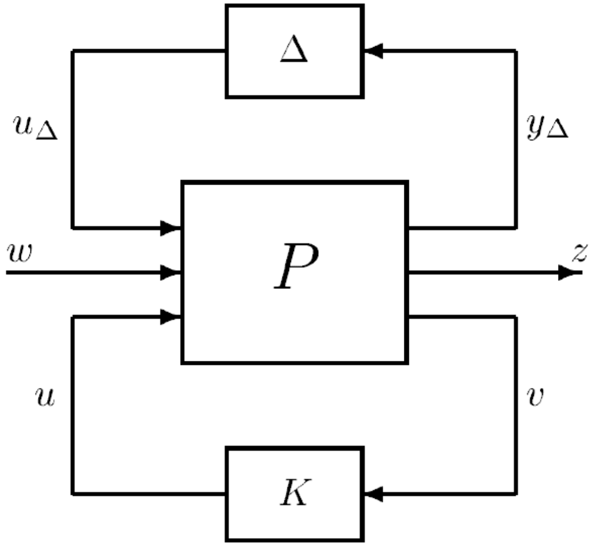
- Brojne pretpostavke o $\boldsymbol{P}$-u obično trebaju biti zadovoljene kako bi se riješio problem optimizacije (algoritamska ovisnost).

Sinteza regulatora

- **Pretpostavka 1.** $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2)$ stabilizirajuće i detektibilne.
  - Zahtijeva se za postojanje stabilizirajućeg $\boldsymbol{K}$.
- **Prepostavka 2.** $\boldsymbol{B}_2$ i $\boldsymbol{B}_2$ imaju puni rang
  - Osigurava pravilan $\boldsymbol{K}$
- **Pretpostavka 3.** Matrica $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - j\omega \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{12} \end{bmatrix}$ ima puni rang za sve ω.
- **Pretpostavka 4.** Matrica $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - j\omega \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} \end{bmatrix}$ ima puni rang za sve ω.
  - Izbjegavati poništavanje polova i nula na imaginarnoj osi (Pretpostavke 3. i 4.).
- **Pretpostavka 5.** $\boldsymbol{D}_{11} = 0$ i $\boldsymbol{D}_{22} = 0$.
  - Osigurava pravilne funkcije prijenosa (kod H_2).

Sinteza regulatora

- **Opći problem upravljanja sa neizvjesnošću**



$$\boldsymbol{z = F(P, K, \Delta) w}$$

- RS (neizvjesnost predstavljana punom matricom): ***H_∞* optimalno upravljanje** koje uključuje i funkciju prijenosa od $\boldsymbol{u}_\Delta$ do $\boldsymbol{u}_\Delta$ ukorporiranu u $\boldsymbol{F(P, K)}$.
- RS za strukturiranu neizvjesnost i RP: **μ sinteza** (pogledati lekciju 4.):

$$\min_{K} \max_{\omega} \mu_{RP}(N)$$

H_2 optimalno upravljanje

- Standardni H_2 problem optimalnog upravljanja sastoji se od pronalaženja stabilizirajućeg regulatora $\boldsymbol{K}$ koji minimizira:

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{F}(s)\right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(j\omega)\boldsymbol{F}(j\omega)^T d\omega}; \quad \boldsymbol{F} \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})}$$

- Interpretacije H_2 norme:
  - **Signal**: kovarijanca izlaza za ulaz bijelog šuma $\boldsymbol{w}$:

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{F}(s)\right\|_2^2 = \lim_{t\to\infty} E\{\boldsymbol{z}(t)^T \boldsymbol{z}(t)\}, \; E\{\boldsymbol{w}(t)^T \boldsymbol{w}(t)\} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\delta}(t-\tau)}$$

što slijedi iz Parsevalovog teorema:

$$E\{\boldsymbol{z}(t)^T \boldsymbol{z}(t)\} = tr E\{\boldsymbol{z}(t)\boldsymbol{z}(t)^T\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr[\boldsymbol{F}(j\omega)\boldsymbol{F}(j\omega)^H]d\omega$$

H_2 optimalno upravljanje

- **Sistem**: suma područja svih singularnih vrijednosti od $\boldsymbol{F}$:

$$\left\|\boldsymbol{F}(s)\right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_i^2(\boldsymbol{F}(j\omega))d\omega}$$

- Minimizacija kovarijance izlaza za ulaz tipa bijelog šuma sličan je LQG problemu – RMS (Root-Mean-Square minimizacija).
- Problem H_2 optimalnog upravljanja može se eksplicitno riješiti pomoću dvije Riccatijeve jednadžbe.
- Rješenje se može iskazati u formi **optimalni observer stanja** + **optimalna povratna veza stanja** (optimal state feedback).

LQG optimalno upravljanje

- Specijalan slučaj H_2 optimalnog upravljanja.
- Promatra se stohastički sistem:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}_d$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}_n$$

sa:

$$E\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_d(t)\\ \boldsymbol{w}_n(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_d(\tau)^T & \boldsymbol{w}_n(\tau)^T\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}\end{bmatrix}\delta(t-\tau)$$

- LQG problem $\Rightarrow$ naći $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{y}$ takav da je:

$$\boxed{J = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]dt\right\}}$$

$\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{R}$ su odabrane konstantne težinske matrice (parametri sinteze).

minimiziran sa $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T \geq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T \geq \boldsymbol{0}$.

LQG optimalno upravljanje

- LQG problem može se prikazati kao H_2 optimizacija.
- Definirajmo signal greške $\boldsymbol{z}$ kao:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

i predstavimo stohastičke ulaze $\boldsymbol{w}_d$ i $\boldsymbol{w}_n$ kao:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_d \\ \boldsymbol{w}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

gdje je $\boldsymbol{w}$ procesni bijeli šum jedinične vrijednosti:

$$E\{\boldsymbol{w}(\tau)^T \boldsymbol{w}(\tau)\} = \delta(t-\tau)\boldsymbol{I}$$

LQG optimalno upravljanje

- LQG funkcija kakvoće:

$$J = E\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{z}(t)^T \boldsymbol{z}(t) dt \right\} = \left\| \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K}) \right\|_2^2$$

gdje je:

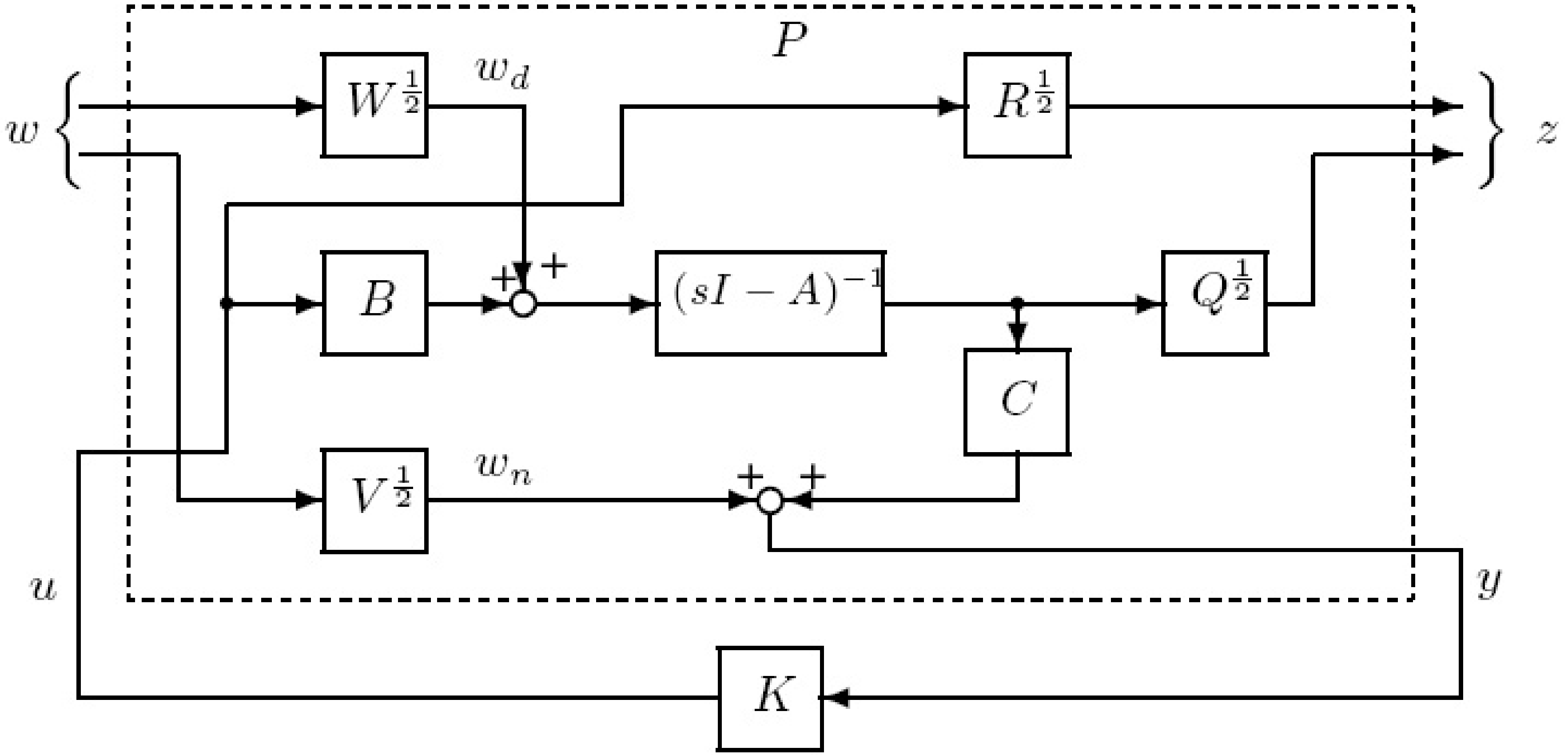
$$\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K}) \boldsymbol{w}(s)$$

i korespondentni generalizirani proces ***P*** je:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{W}^{1/2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{Q}^{1/2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^{1/2} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V}^{1/2} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

LQG optimalno upravljanje

- Opća upravljačka konfiguracija za LQG kao problem H_2 optimalnog upravljanja.



LQG optimalno upravljanje - rješenje

- **Optimalna povratna veza stanja**:

$$\boxed{\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{x}}(t)}$$

gdje $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T \geq \boldsymbol{0}$ rješava ARE:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}}$$

- **Optimalni estimator stanja**:

$$\boxed{\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t))}$$

gdje $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^T \geq \boldsymbol{0}$ rješava ARE:

$$\boxed{\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}}$$

- Opći H_2 optimalni regulator može se separirati u optimalnu povratnu vezu stanja kombiniranu sa optimalnim estimatorom stanja, gdje svaki uključuje rješavanje po jedne ARE.

H_∞ optimalno upravljanje

- U skladu sa općom upravljačkom konfiguracijom sa slajda 14. standardni H_∞ problem optimalnog upravljanja sastoji se u pronalaženju stabilizirajućeg regulatora $\boldsymbol{K}$ koji minimizira:

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})\right\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\omega))}$$

tj.

$$\min_{\boldsymbol{K}} \left\|\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})\right\|_\infty = \min_{\boldsymbol{K}} \max_{\omega} \bar{\sigma}(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\omega))$$

- Interpretacije H_∞ norme:
  - **Signal:** **maksimizacija izlaza** s obzirom na ulaz (najlošiji slučaj – inducirana 2-norma):

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{F}\right\|_\infty = \max_{\boldsymbol{w}(t)\neq 0} \frac{\left\|\boldsymbol{z}(t)\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\|_2}} \qquad \left\|\boldsymbol{z}(t)\right\|_\infty = \sqrt{\int_0^\infty \sum_i \left|z_i(t)\right|^2 dt}$$

H_∞ optimalno upravljanje

"Najlošiji slučaj" signala odgovara sinusoidama sa fiksnom frekvencijom.

- **Sistem:** **vršna vrijednost maksimuma singularne vrijednosti**:

$$\boxed{\|\boldsymbol{F}\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(\boldsymbol{F})}$$

- H_∞ optimalni problem općenito se ne može riješiti eksplicitno.
- Međutim, moguće je odrediti regulator koji daje:

$$\boxed{\|\boldsymbol{F}\|_\infty < \gamma}$$

za fiksni γ, ako takav regulator postoji.

H_∞ optimalno upravljanje

Opći H_∞ algoritam

- Promatrajmo realizaciju generaliziranog procesa u prostoru stanja za strukturu sa slajda 14.:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} \end{bmatrix}$$

- Pretpostavimo da vrijede ranije pretpostavke (1.- 5.) i pretpostavke: (6.) $\boldsymbol{D}_{12}=[\mathbf{0}\ \boldsymbol{I}]^T$, $\boldsymbol{D}_{21}=[\mathbf{0}\ \boldsymbol{I}]$, (7.) $\boldsymbol{D}_{12}{}^T\boldsymbol{C}_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}{}^T = \mathbf{0}$, (8.) $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_1)$ moguće stabilizirati i $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_1)$ moguće detektirati.

H_∞ optimalno upravljanje

- Ukoliko vrijede navedene pretpostavke, tada postoji regulator $\boldsymbol{K}(s)$ takav da je $\left\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})\right\|_\infty < \gamma$ ako i samo ako Riccatijeve jednadžbe:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}_\infty + \boldsymbol{X}_\infty\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{X}_\infty(\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^T - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^T)\boldsymbol{X}_\infty = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_\infty + \boldsymbol{Y}_\infty\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^T + \boldsymbol{Y}_\infty(\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{Y}_\infty = \boldsymbol{0}$$

imaju rješenja $\boldsymbol{X}_\infty \geq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{Y}_\infty \geq \boldsymbol{0}$ takva da za $\forall i$ vrijedi:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[\boldsymbol{A} + (\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^T - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^T)\boldsymbol{X}_\infty\right] < 0$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Y}_\infty(\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{Y}_\infty\right] < \rho(\boldsymbol{X}_\infty, \boldsymbol{Y}_\infty) < \gamma^2$$

- Ako takvo rješenje postoji tada postoji skup regulatora $\boldsymbol{K}$ koji zadovoljava uvjet $\left\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})\right\|_\infty < \gamma$.

H_∞ optimalno upravljanje

- Centralni regulator ima jednak broj stanja kao i generalizirani proces $\boldsymbol{P}(s)$ i može se prikazati u formi observer + povratna veza stanje:

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}_1\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1^T\boldsymbol{X}_\infty\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Z}_\infty\boldsymbol{L}_\infty(\boldsymbol{C}_2\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_\infty\hat{\boldsymbol{x}}\end{gathered}}$$

gdje su:

$$\boldsymbol{F}_\infty = \boldsymbol{B}_2^T\boldsymbol{X}_\infty; \;\; \boldsymbol{L}_\infty = -\boldsymbol{Y}_\infty\boldsymbol{C}_2^T; \;\; \boldsymbol{Z}_\infty = (\boldsymbol{I} - \gamma^{-2}\boldsymbol{Y}_\infty\boldsymbol{X}_\infty)^{-1}$$

- Da bi se odredio H_∞ optimalni regulator, obavljati iteracije dok se ne pronađe minimum od γ za koji rješenje postoji (γ iteracije).
- Ovo predstavlja problem konveksne optimizacije.

H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- **Mješovita osjetljivost** (mixed-sensitivity) vezana je za probleme oblikovanja funkcije prijenosa u kojoj je funkcija osjetljivosti $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{GK})^{-1}$ oblikovana zajedno sa još jednom ili više funkcija prijenosa zatvorene petlje, kao što su $\boldsymbol{KS}$ ili $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}$.
- Zahtjevi na sintezu regulatora:
  - eliminiranje utjecaja smetnje $\boldsymbol{d}$ na izlazu procesa,
  - pretpostavka da je šum mjerenja relativno nevažan.
- Ovaj pristup je zasnovan na oblikovanju sljedećih funkcija prijenosa:
  - $\boldsymbol{S}$ (funkcija prijenosa između $\boldsymbol{d}$ i izlaza)
  - $\boldsymbol{KS}$ (funkcija prijenosa između $\boldsymbol{d}$ i upravljačkih signala).

H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- Smetnja $\boldsymbol{d}$ je niskofrekvencijski signal $\Rightarrow$ uspješno eliminiranje ako se maksimum singularne vrijednosti od $\boldsymbol{S}$ učini malim unutar tih frekvencija.
- Drugim riječima, da bi se optimirale performanse potrebno je minimizirati:

$$\left\| w_1 \boldsymbol{S} \right\|_\infty$$

w_1 – niskopropusni filter

- Da bi se minimizirali upravljački ulazi, potrebno je minimizirati:

$$\left\| w_2 \boldsymbol{KS} \right\|_\infty$$

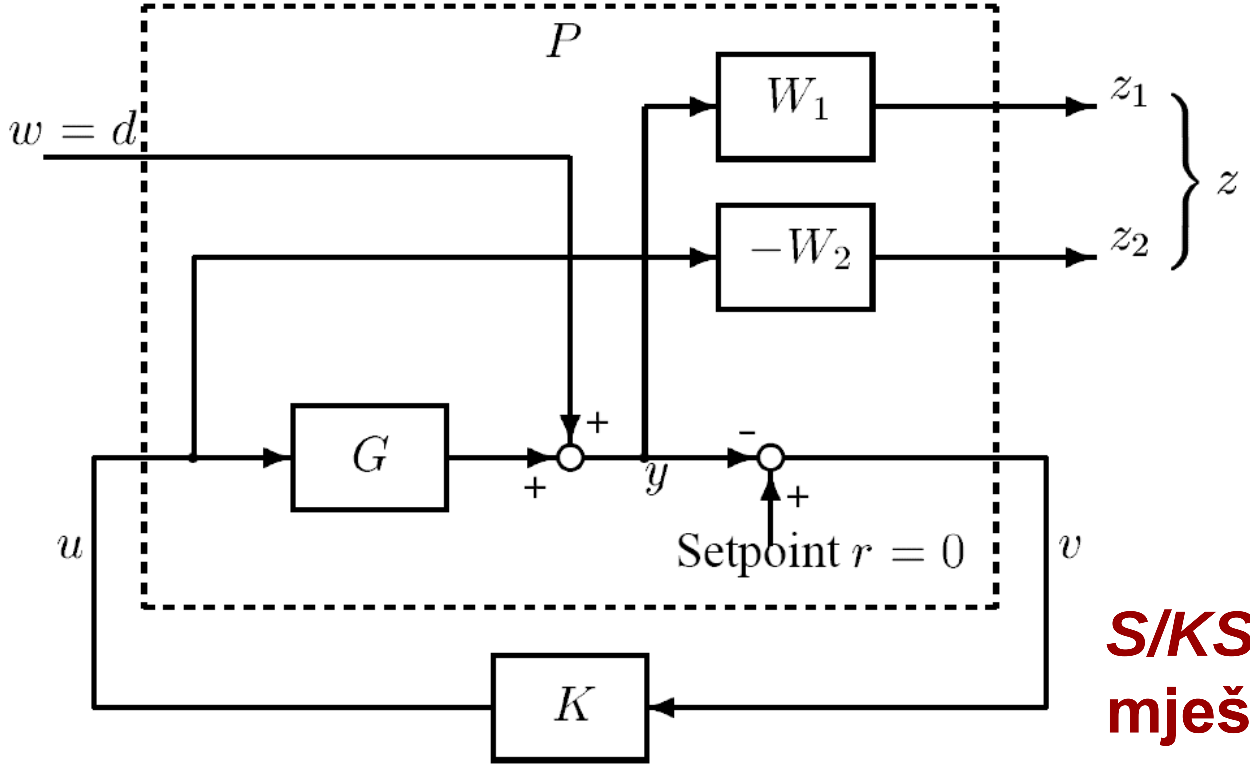
w_2 – visokopropusni filter

- Kompromis između ova dva zahtjeva:

$$\boxed{\left\| \begin{bmatrix} w_1 \boldsymbol{S} \\ w_2 \boldsymbol{KS} \end{bmatrix} \right\|_\infty}$$

H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- Općenito se skalarne težinske funkcije $w_1(s)$ i $w_2(s)$ mogu zamijeniti matricama $\boldsymbol{W}_1(s)$ i $\boldsymbol{W}_2(s)$.
- Opća postavka: smetnja $\boldsymbol{d}$ kao pojedinačni vanjski ulaz, signal pogreške $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1^T & \boldsymbol{z}_2^T \end{bmatrix}^T$; $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}_2 = -\boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{u}$



_S/KS_ optimizacija mješovite osjetljivosti

H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- Na temelju prethodnih izraza imamo $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}$ i

$$\boldsymbol{P}_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{W}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{21} = -\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{P}_{22} = -\boldsymbol{G}$$

odnosno:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}}$$

i

$$\boxed{\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{K}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{S} \end{bmatrix}}$$

H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- Drugi koristan problem optimizacije zasnovan na mješovitoj osjetljivosti je pronaći stabilizirajući regulator koji minimizira:

$$\boxed{\left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \right\|_\infty}$$

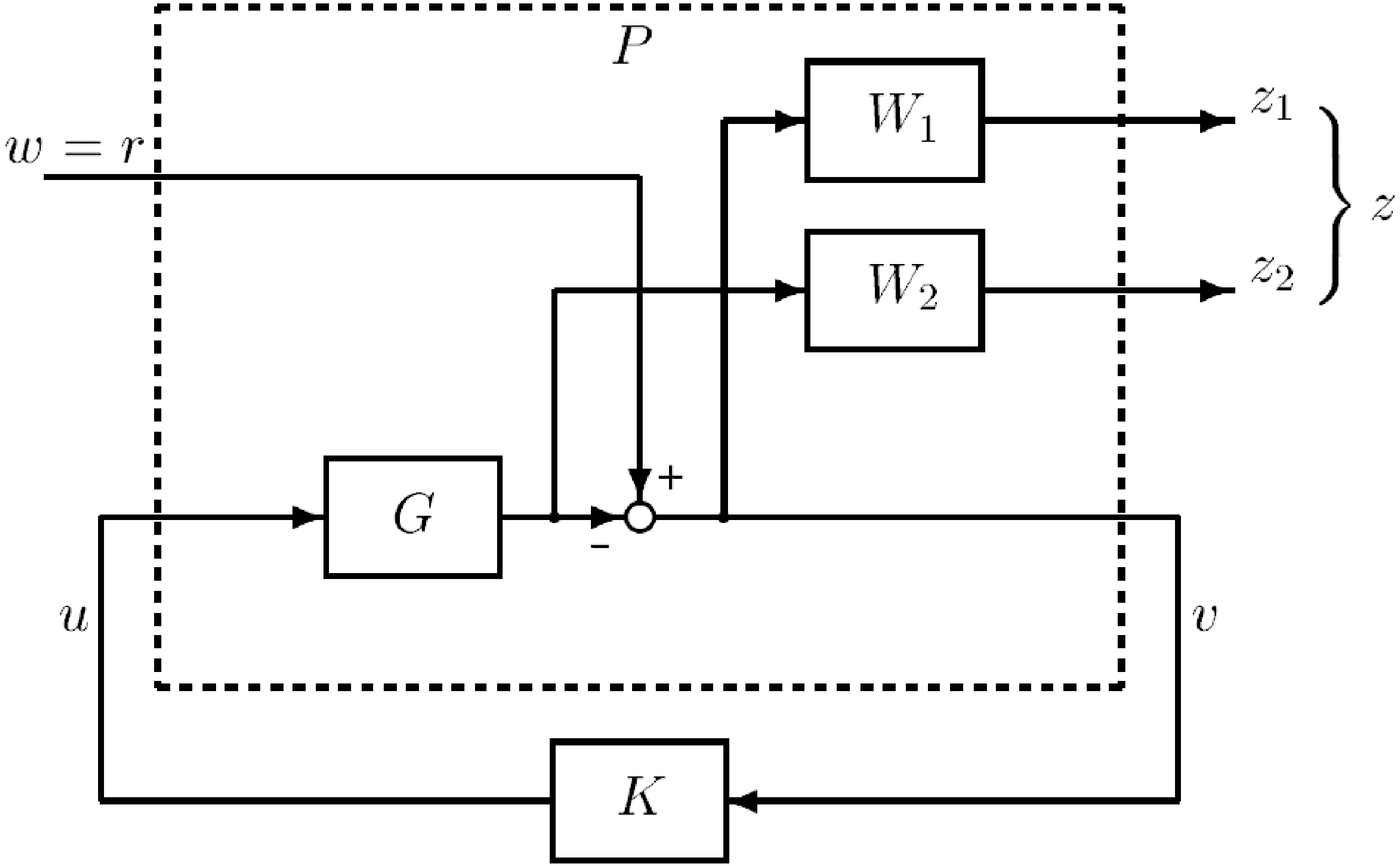
- *S/T* problem optimizacije mješovite osjetljivosti može se ukorporirati u standardnu upravljačku konfiguraciju (slika na sljedećem slajdu):

$$\boldsymbol{P}_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{12} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{W}_1 \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{W}_2 \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{21} = -\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{P}_{22} = -\boldsymbol{G}$$

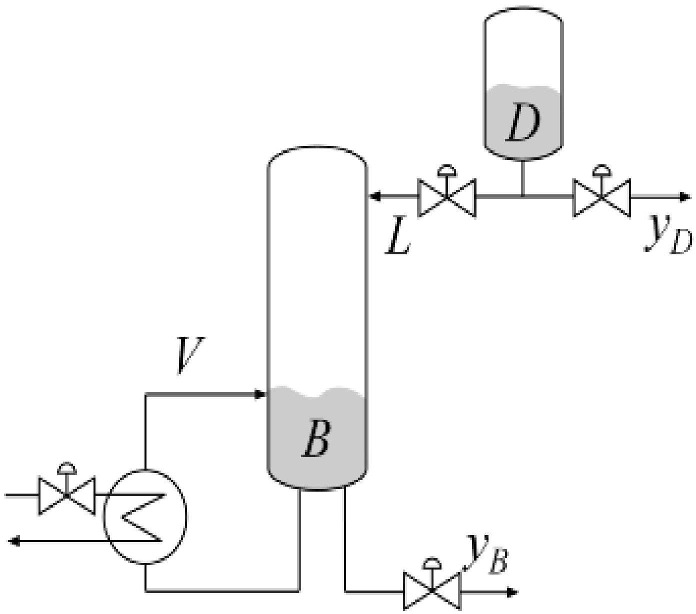
H_∞ upravljanje mješovite osjetljivosti

- S/T minimizacija mješovite osjetljivosti



Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- **Destilacijska kolona** (LV konfiguracija)

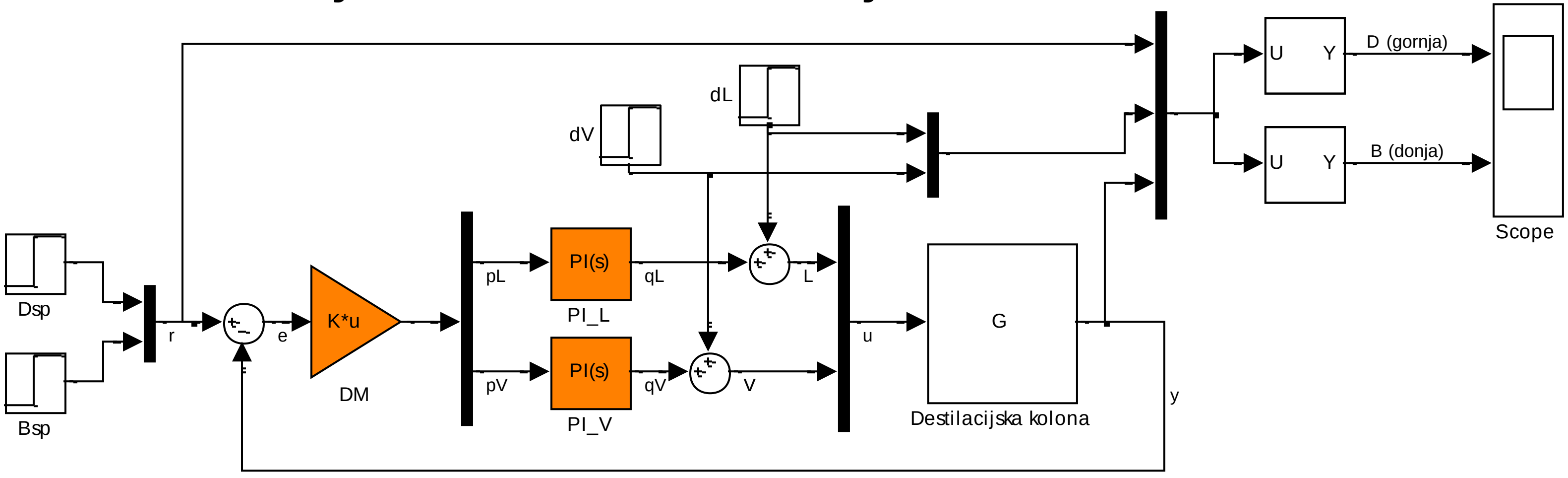


$$G(s) = \frac{1}{75s+1}\begin{bmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{bmatrix}$$

- Upravljane varijable su koncentracije y_D i y_B hemikalija D (gornja posuda) i B (donja posuda). Upravljačke varijable su temperatura V i protok L.
- Proces je modeliran kao matrica prijenosa čiji su ulazi L i V i izlazi y_D i y_B .

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Simulacijski model destilacijske kolone.



- **Osnovni zahtjevi na sistem upravljanja su:**
  - neovisno upravljanje koncentracijama hemikalija u koloni osiguravajući da promjena postavne veličine za jednu koncentraciju ima mali utjecaj na drugu koncentraciju i obratno,
  - vrijeme odziva oko deset minuta,
  - neosjetljivost odlaznog toka iz posude i temperature zagrijavanja koncentracije na djelovanje poremećaja.

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Za postizanje navedenih ciljeva koristi se upravljačka arhitektura sa statičkom matricom rasprezanja (na slici DM) u seriji sa dva paralelna PI regulatora za regulaciju L i V.
- Potrebno je obaviti namještanje matrice rasprezanja DM i koeficijenta PI regulatora.
- Prvi korak se sastoji u parametrizaciji podesivih elemenata matrice DM.
- Na ovaj način se kreira (2 x 2) matrica statičkih pojačanja sa četiri podesiva parametra.
- Da bi se eliminirali redundantni parametri obavlja se normiranje PI regulatora, fiksiranjem proporcionalnih pojačanja K_p na jedinične vrijednosti.

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Nakon toga se formuliraju specifikacije dizajna kao H_∞ sinteza.
- Jedan od mogućih izbora – podesiti željeni propusni opseg za funkcije osjetljivosti $\boldsymbol{S}$ i komplementarne osjetljivosti $\boldsymbol{T}$ zatvorenog sistema.
- Ovo vodi ka kriteriju dizajna mješovite osjetljivosti:

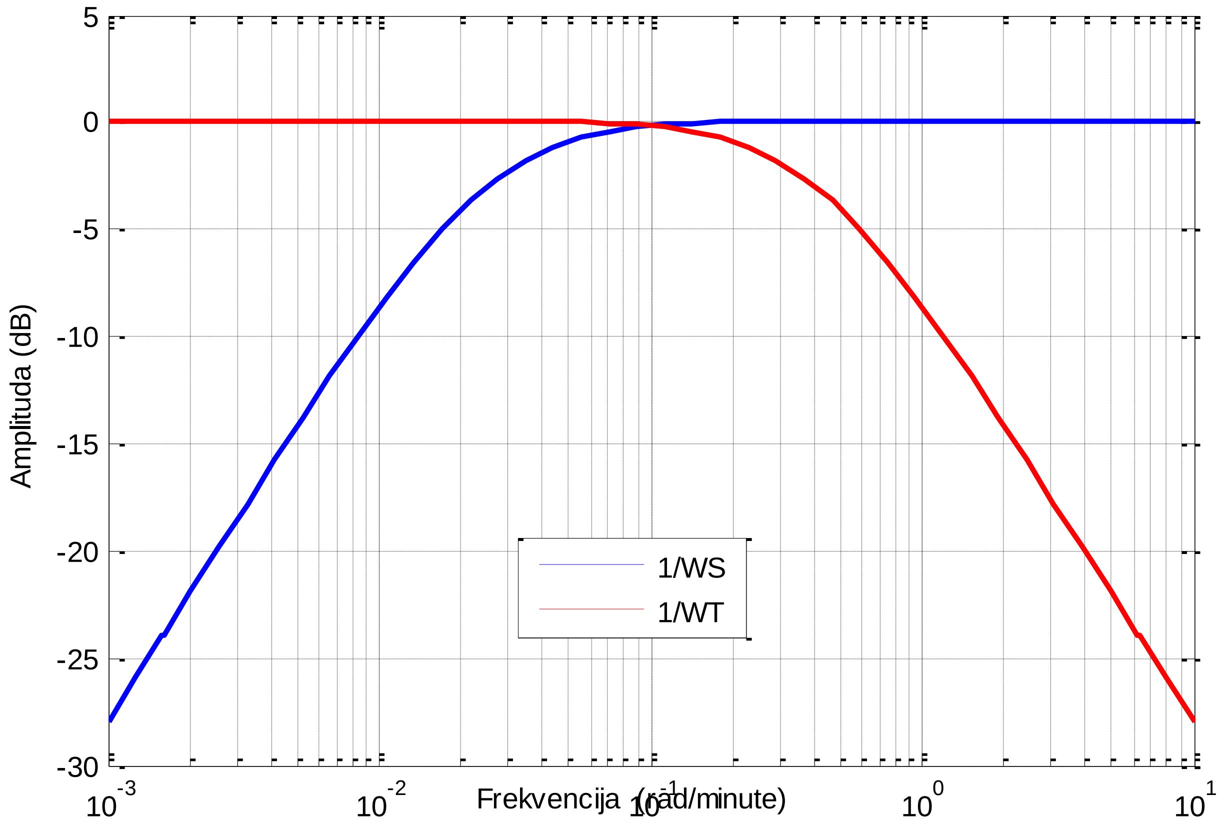
$$\left\| \begin{bmatrix} w_S \boldsymbol{S} \\ w_T \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

- Na ovaj način w_S "prisiljava" $\boldsymbol{S}$ da bude malog iznosa unutar propusnog opsega, dok w_T prisiljava $\boldsymbol{T}$ da se kreće izvan propusnog opsega.

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Za ciljnu presječnu frekvenciju $\omega_c = 0.1$, dobar izbor težina je:

$$w_S = 0.99 + \frac{0.25}{s/\omega_c + 0.001},\ \ w_T = 0.99 + \frac{0.95\cdot(s/\omega_c)}{0.001\cdot s/\omega_c + 1}$$



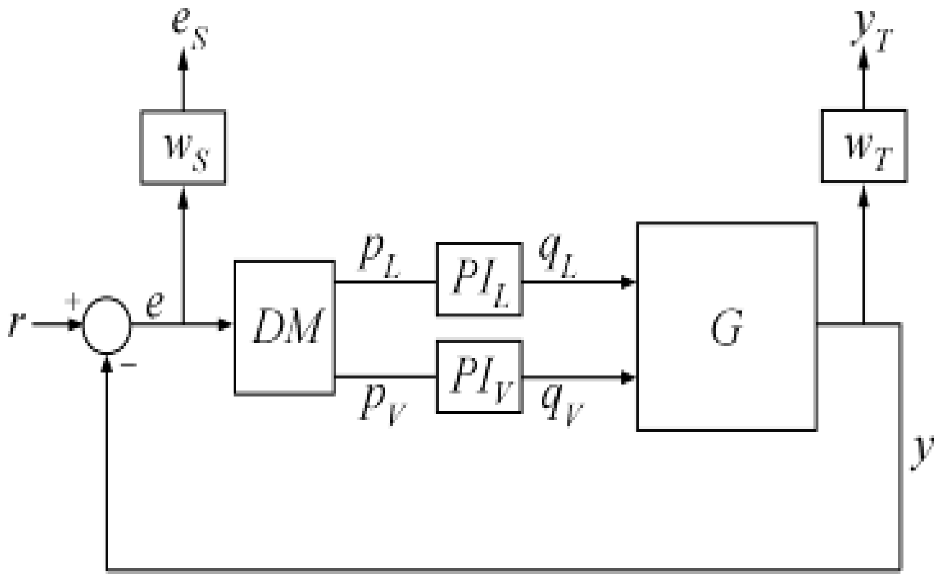
Granice na pojačanja S i T ($1/w_S$ i $1/w_T$)

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Finalni korak je izgraditi parametarski model funkcije prijenosa:

$$\begin{bmatrix} w_S \boldsymbol{S} \\ w_T \boldsymbol{T} \end{bmatrix}$$

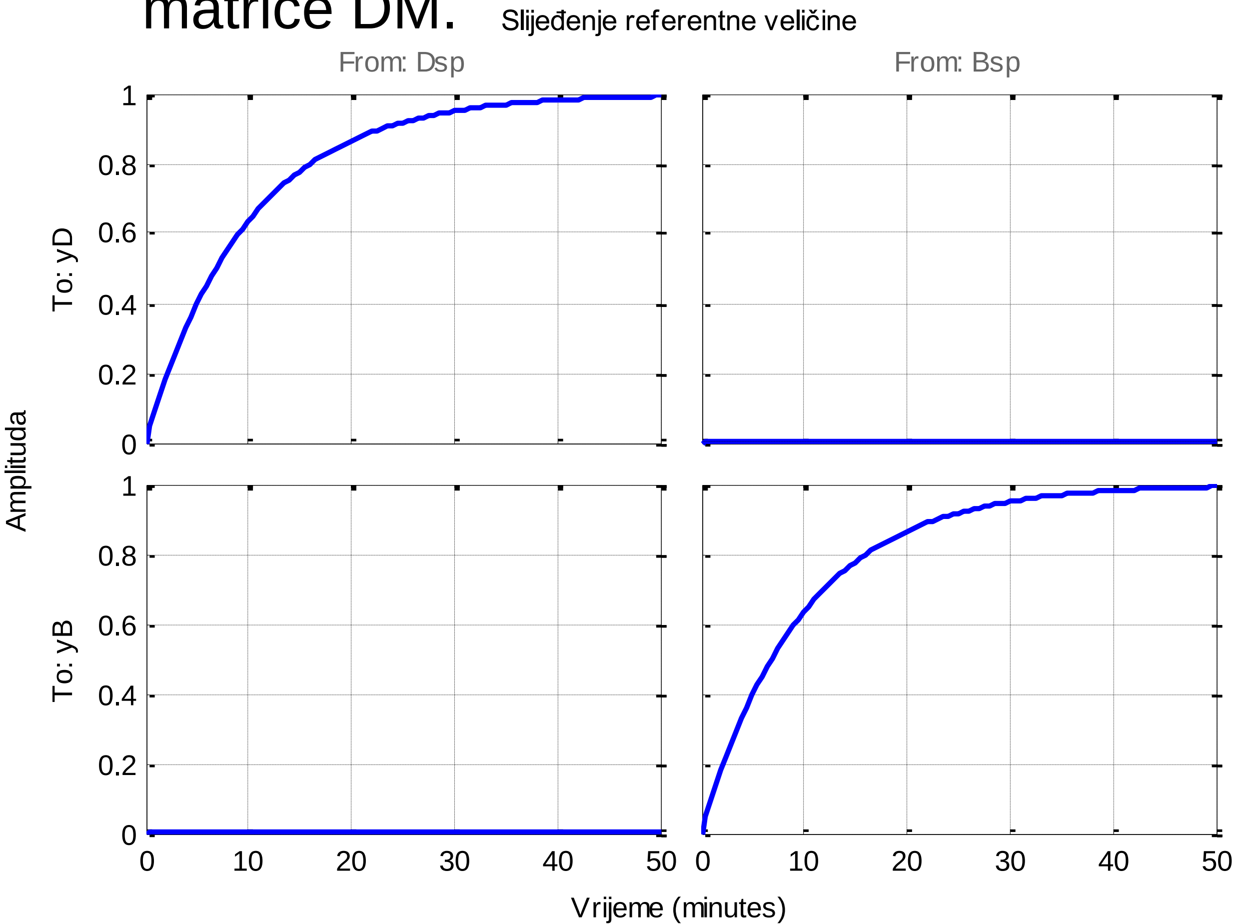
- Ova funkcija prijenosa preslikava $\boldsymbol{r}$ u $(\boldsymbol{e}_S, \boldsymbol{y}_T)$.



Blok dijagram za dizajn H_∞ za mješovitu osjetljivost

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Na temelju prethodne strukture konstruira se model u prostoru stanja koji predstavlja kriterij mješovite osjetljivosti.
- Ovaj model ovisi o podesivim parametrima PI regulatora i matrice DM.



Prvi dizajn:

Patrametri PI_L1 regulatora:

$$K_p = 1,\ K_i = 0.0133$$

Patrametri PI_L1 regulatora:

$$K_p = 1,\ K_i = 0.0133$$

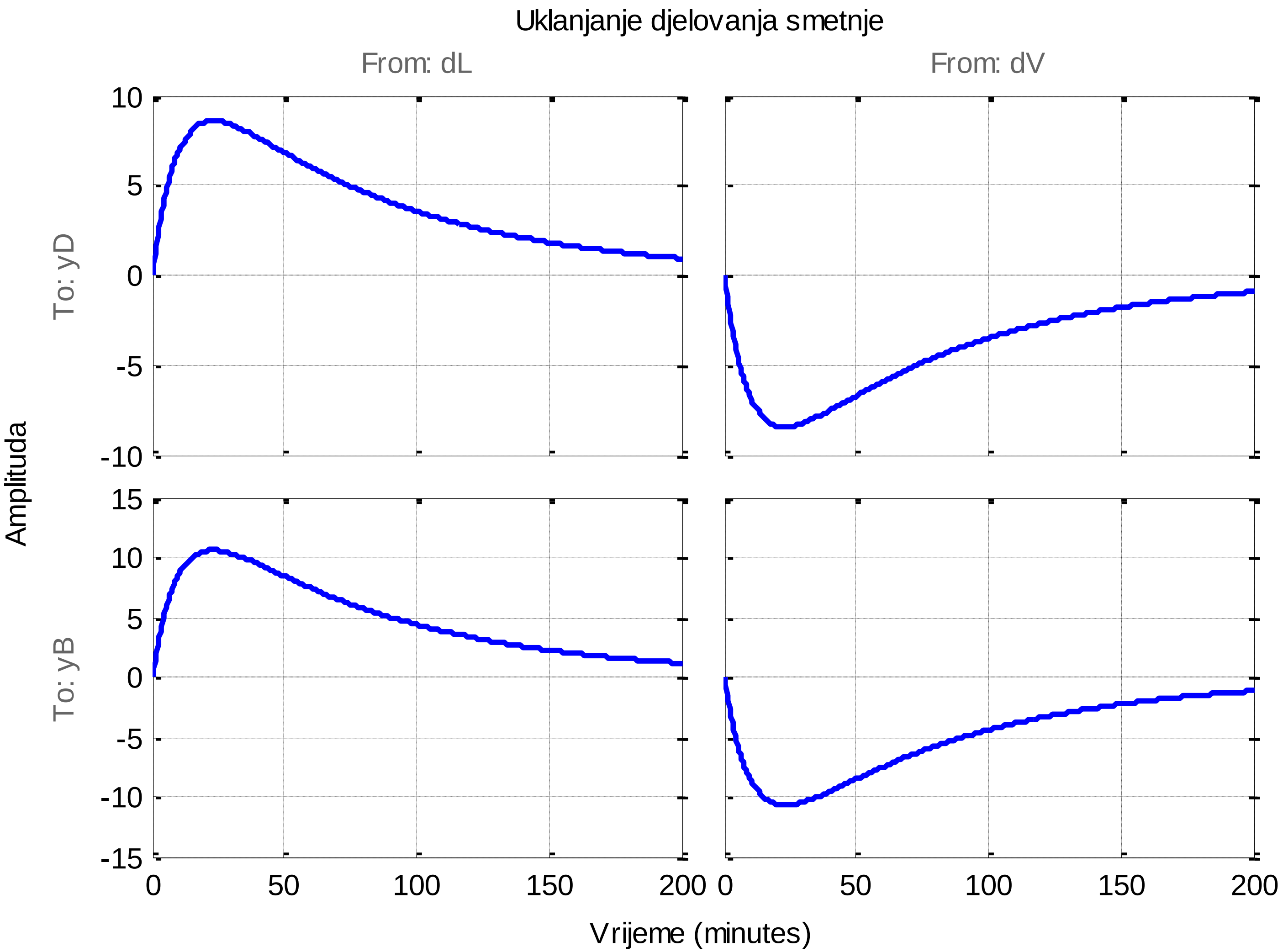
Matrica DM:

$$DM = \begin{bmatrix} 2.996 & -2.362 \\ 2.957 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Dijagrami slijeđenja referentnih vrijednosti

Primjer sinteze H_∞ upravljanja

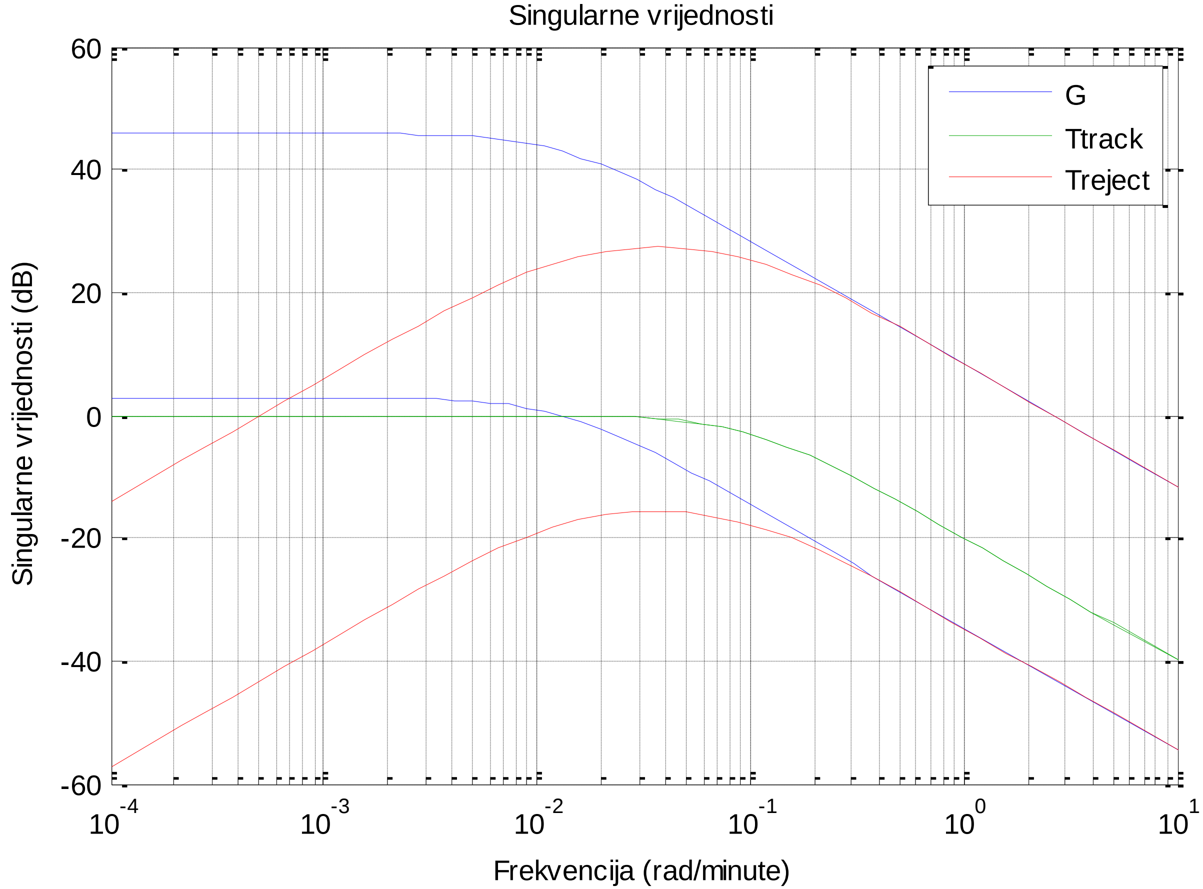
- Otklanjanje utjecaja djelovanja smetnji.



Dobro slijeđenje referentnih veličina, slabo otklanjanje djelovanja smetnji.

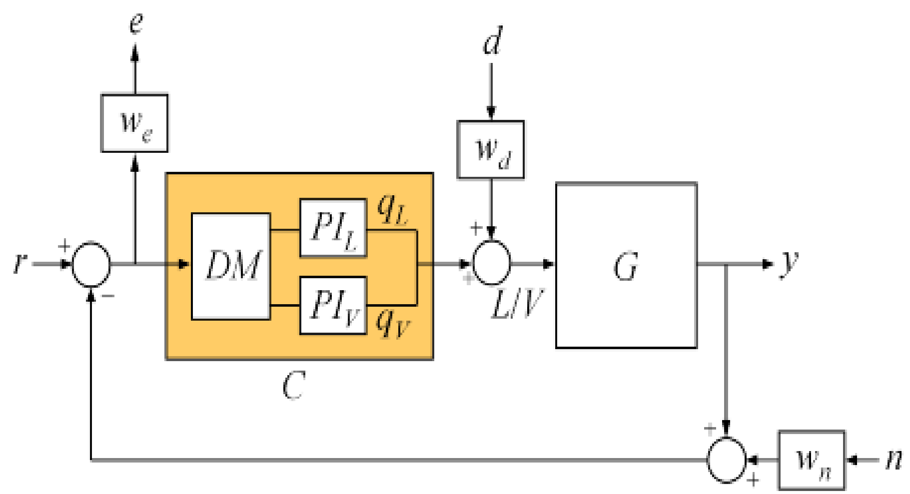
Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Ispitivanje glavnih pojačanja (principal gains) funkcije prijenosa zatvorenog sistema od d prema y indicira da regulator ne prigušuje zadovoljavajuće neizvjesnost procesa na promjene ulaza.



Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Za poboljšanje otklanjanja djelovanja smetnje koristi se sljedeća unaprijeđena upravljačka struktura.

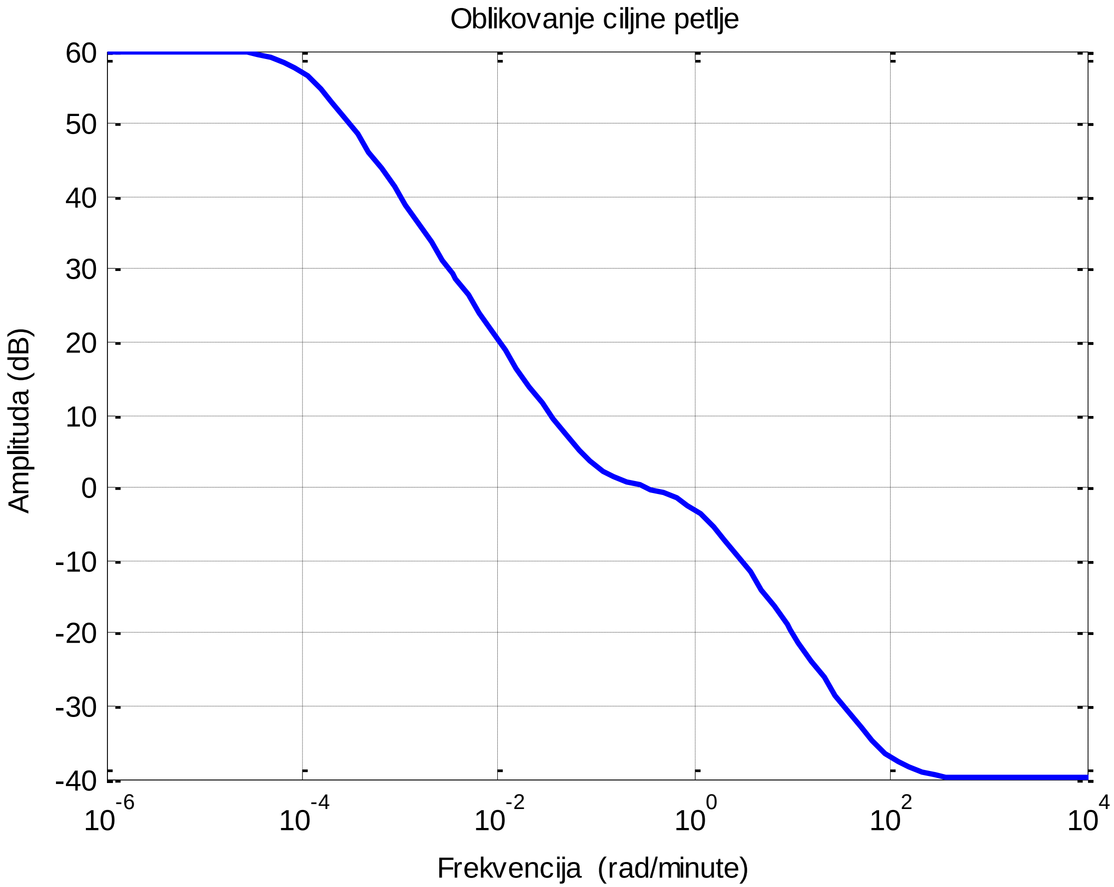


- Odabir težinskih funkcija ($\omega_c = 0.1$):

$$w_e = \frac{(s+\omega_c)}{s+\dfrac{\omega_c}{1000}} \frac{\dfrac{s}{1000\omega_c}+1}{\dfrac{s}{10\omega_c}+1}, \quad w_n = \frac{1}{w_e}, \quad w_d = 0.25$$

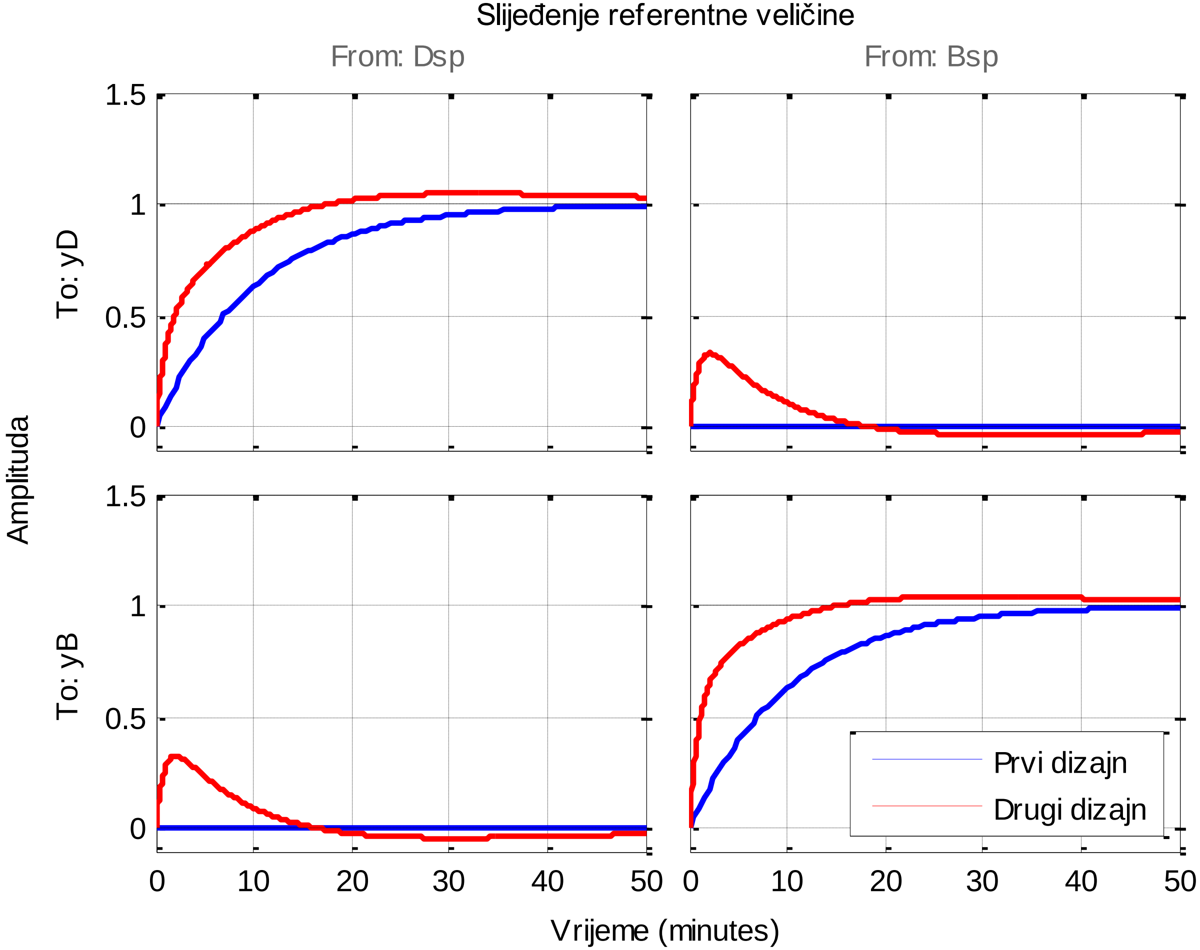
Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- w_e definira ciljni oblik odziva otvorene petlje (otvoreni sistem), predstavljen amplitudnom karakteristikom (Bodeov dijagram za w_e).



Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Usporedba rezultata prvog i drugog regulatora (upravljačke strukture sa slajdova 40. i 44.) – slijeđenje referentnih veličina.



Drugi dizajn:

Patrametri PI_L2 regulatora:

$$K_p = 1,\ K_i = 0.0363$$

Parametri PI_V2 regulatora:

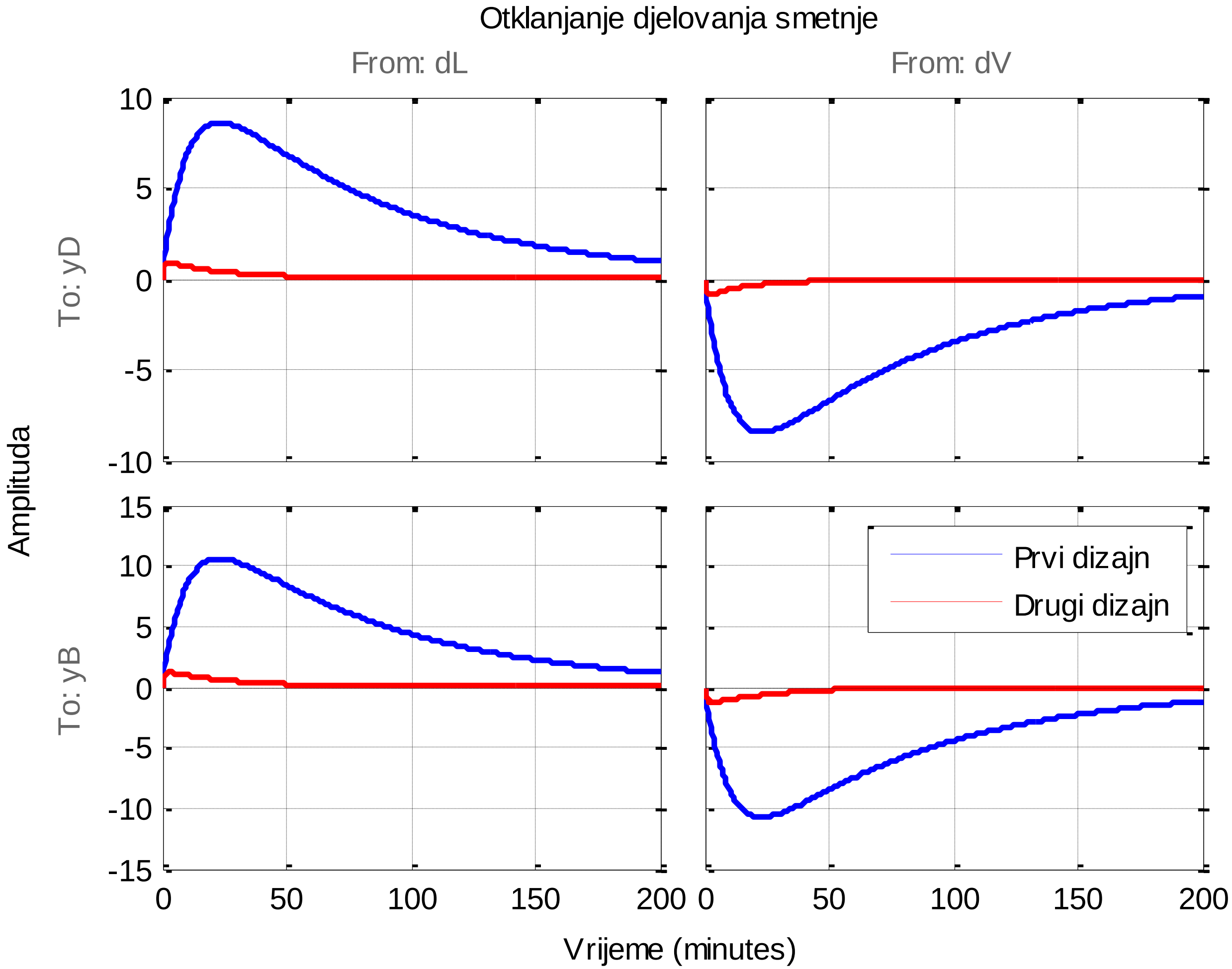
$$K_p = 1,\ K_i = 0.0367$$

Matrica DM:

$$DM = \begin{bmatrix} 4.571 & -2.462 \\ 4.179 & -2.927 \end{bmatrix}$$

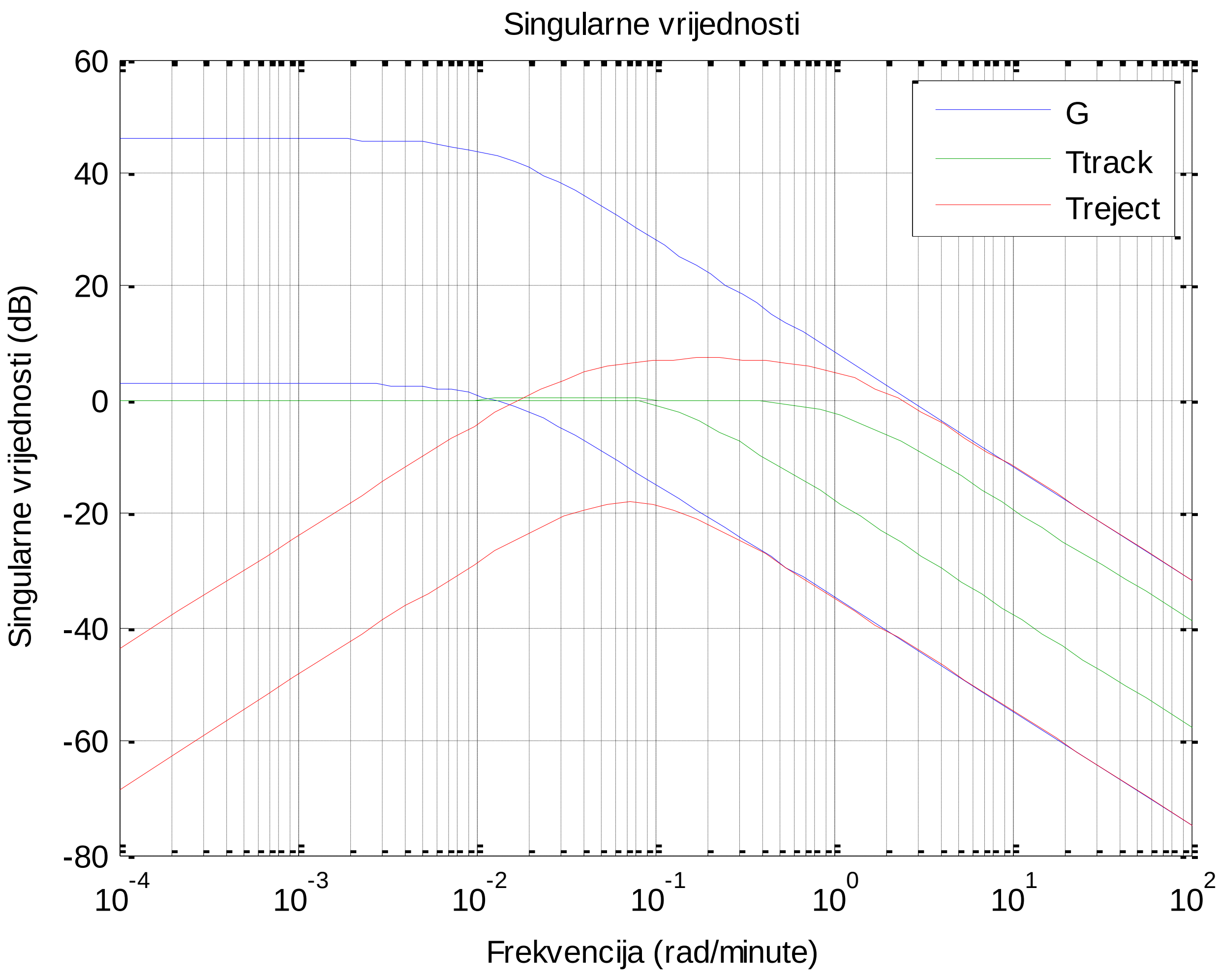
Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Usporedba rezultata prvog i drugog regulatora (upravljačke strukture sa slajdova 40. i 44.) – otklanjanje djelovanja smetnje.



Primjer sinteze H_∞ upravljanja

- Poboljšanje gušenja smetnje je evidentno iz usporedbe glavnih pojačanja od G i T_{reject}.



Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Neophodna procedura dizajna koja će biti mnogo fleksibilnija od procedure zasnovane na mješovitoj osjetljivosti, a u isto vrijeme ne toliko komplicirana kao što je μ-sinteza.
- U nastavku se opisuje procedura **sinteze regulatora oblikovanjem petlje u kombinaciji sa H_∞ robusnom stabilizacijom** [McFarlane & Glover, 1990].
- **Korak 1.** Dodavanje pretkomenzatorora i postkompenzatora procesu kako bi se dobio željeni oblik singularnih vrijednosti frekvencijske karakteristike otvorene petlje.
- **Korak 2.** Rezultantni oblikovani proces se robusno stabilizira s obzirom na koprim faktor neizvjesnosti korištenjem H_∞ optimizacije.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

Robusna stabilizacija

- Kod MIMO sistema, klasična amplitudno i fazno osiguranje (rezerva) nisu pouzadni indikatori za robusnu stabilnost, pogotovo ako se promatraju odvojeno za svaki kanal, zbog istovremenog djelovanja perturbacija u više od jedne petlje (matrica perturbacija).
- U slučaju pojedinačnih perturbacija testovi robusnosti su izraženi preko maksimuma singularnih vrijednosti funkcija prijenosa različitih zatvorenih petlji.
- **Korištenje pojedinačne stabilne perturbacije dovodi do restrikcije procesa i perturbirani modeli procesa imaju jednak broj nestabilnih polova ili jednak broj nestabilnih nula (RHP).**

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- **Da bi se prevazišli ovi problemi, koriste se dvije stabilne perturbacije sa koprim faktorizacijom procesa** (koristan način prikaza modela procesa).
- Razmatramo stabilizaciju procesa $\boldsymbol{G}(s)$ koji je normiran koprim faktorizacijom (slijeva):

$$\boxed{\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{M}^{-1}(s)\boldsymbol{N}(s)}$$

  $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{N}$ su stabilne koprim funkcije prijenosa, gdje $\boldsymbol{M}$ iskazuje dinamiku polova, a dinamiku nula $\boldsymbol{N}$.

- **Stabilnost** implicira da $\boldsymbol{N}(s)$ sadrži sve RHP nule od $\boldsymbol{G}(s)$, a $\boldsymbol{M}(s)$ sve RHP polove od $\boldsymbol{G}(s)$.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- **Koprimnost** znači da nema zajedničkih RHP nula (uključujući tačku u beskonačnosti) u $\boldsymbol{M}(s)$ i $\boldsymbol{N}(s)$ kojima bi se poništili polovi/nule kada se formira produkt $\boldsymbol{M}(s)\boldsymbol{N}(s)$.
- Matematički koprimnost znači da postoje stabilne $\boldsymbol{U}(s)$ i $\boldsymbol{V}(s)$ takve da vrijedi Bezout identitet:

$$\boxed{\boldsymbol{M}(s)\boldsymbol{V}(s)+\boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{U}(s)=\boldsymbol{I}}$$

- Ako se uzme $\boldsymbol{V}(s)=\boldsymbol{M}^T(-s);\;\; \boldsymbol{U}(s)=\boldsymbol{N}^T(-s)$

$$\boldsymbol{M}(s)\boldsymbol{M}^T(-s)+\boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{N}^T(-s)=\boldsymbol{I}$$

- Perturbirani model procesa $\boldsymbol{G}_p$ može se opisati sa:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_p(s)=(\boldsymbol{M}(s)+\boldsymbol{\Delta}_M(s))^{-1}(\boldsymbol{N}(s)+\boldsymbol{\Delta}_N(s))}$$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- U prethodnom izrazu Δ_M i Δ_N su stabilne nepoznate funkcije prijenosa koje predstavljaju neizvjesnost u nominalnom modelu procesa $\boldsymbol{G}$.
- Na ovaj način je omogućeno da perturbacije polova i nula sijeku imaginarnu os korištenjem Δ_M i Δ_N.
- **Cilj robusne stabilizacije nije samo stabilizirati nominalni model G, već i familiju perturbiranih procesa definiranih sa**:

$$\boldsymbol{G}_p(s)=\left\{(\boldsymbol{M}(s)+\boldsymbol{\Delta}_M(s))^{-1}(\boldsymbol{N}(s)+\boldsymbol{\Delta}_N(s)):\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_N & \boldsymbol{\Delta}_M\end{bmatrix}\right\|_\infty<\varepsilon\right\}$$

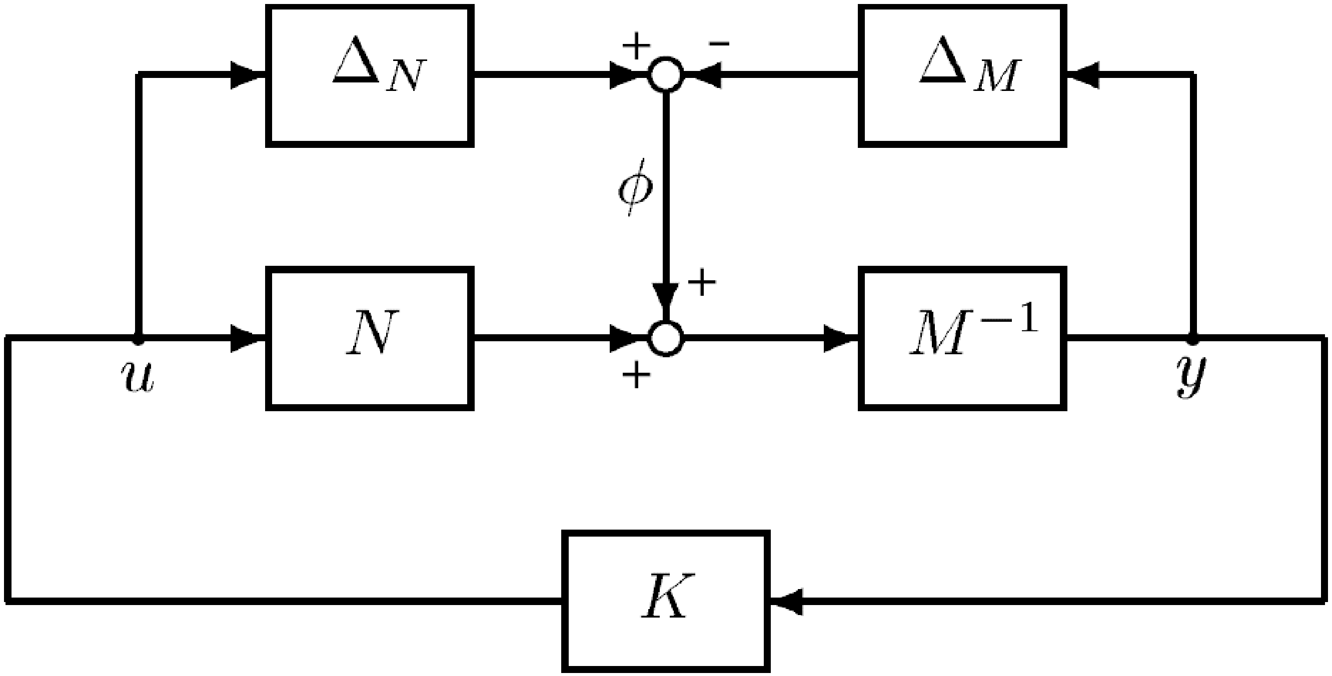
- Prema tome potrebno je odrediti regulator $\boldsymbol{K}$ koji robusno stabilizira $\boldsymbol{G}_p$ sa:

$$\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_N & \boldsymbol{\Delta}_M\end{bmatrix}\right\|_\infty<\varepsilon$$

ε je stabilna rezerva

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Maksimizacija ε predstavlja problem robusne stabilizacije normiranih procesa koprim faktorizacijom, kako je objašnjeno u [Glover & McFarlane, 1989]
- Perturbirani zatvoreni sistem sa H_∞ robusnom stabilizacijom prikazan je na slici.



Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- $\boldsymbol{G}_p$ može se prikazati u $\boldsymbol{P}$-$\boldsymbol{\Delta}$ formi sa $[\Delta_N \;\; \Delta_M]$ i generalizirani proces $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} \boldsymbol{M}^{-1}$$

- Robusna stabilnost je zadovoljena ako:

$$\gamma = \left\| \boldsymbol{P} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

- Maksimalna rezerva stabilnosti je:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{\gamma_{\min}} = \left(1 - \left\| [\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{M}] \right\|_H^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\| \cdot \|_H$ - **Hankelova norma**

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Korespodentni H_∞ optimalni regulator (centralni regulator) tada garantira:

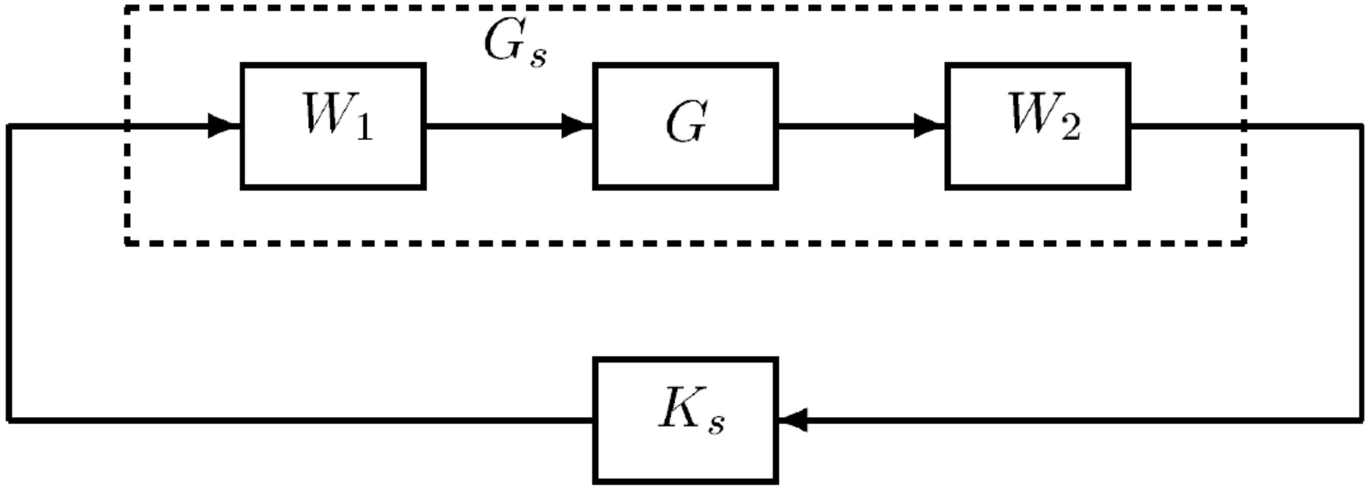
$$\boxed{\left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{K})^{-1} \boldsymbol{M}^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma_{\min}}$$

što se može direktno izračunati rješavanjem dviju algebarskih Riccatijevih jednadžbi.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

Glover-McFarlane oblikovanje petlje

- Korištenjem pretkompenzatora i postkompenzatora dobiva se struktura na slici.



- Oblikovani proces je opisan funkcijom prijenosa G_s:

$$\boxed{G_s(s) = W_2(s)G(s)W_1(s)}$$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Sinteza regulatora $\boldsymbol{K}_s$ obavit će se rješavanjem problema robusne stabilizacije za "oblikovanje" procesa sa normiranom koprim faktorizacijom:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_s(s) = \boldsymbol{M}_s^{-1}\boldsymbol{N}_s}$$

- Regulator zatvorenog kruga za proces $\boldsymbol{G}$ je tada:

$$\boxed{\boldsymbol{K}(s) = \boldsymbol{W}_1(s)\boldsymbol{K}_s(s)\boldsymbol{W}_2(s)}$$

- Problem robusne stabilizacije odvija se u dva koraka
- **Korak 1.** Definirati ciljne performanse (kriterij kakvoće), naprimjer:

$$\left\| w_P \boldsymbol{S} \right\|_\infty < 1 \quad \text{i} \quad \left\| w_T \boldsymbol{T} \right\|_\infty < 1$$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Nakon toga se izabiru $\boldsymbol{W}_1$ i $\boldsymbol{W}_2$ da se postigne:

$$\omega < \omega_B \ : \quad \underline{\sigma}(\boldsymbol{G}_s) > |w_P|$$

$$\omega > \omega_B \ : \quad \overline{\sigma}(\boldsymbol{G}_s) < 1/|w_T|$$

- **Korak 2.** Obaviti robusnu stabilizaciju “oblikovanog” procesa $\boldsymbol{G}_s(s)$ sa $\boldsymbol{K}_s$.
- Ako je $\varepsilon_{\max} \geq 0.25$ tada performansa i robusna stabilnost obično nisu u konfliktu.
- U ostalim slučajevima, ako stabilizacija jako utječe na performansu, vratiti se na korak 1. i modificirati pojačanje petlje.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- **Primjer 1.** Sinteza Glover-McFarlane H_∞ regulatora sa oblikovanjem petlje za procese zahvaćene smetnjom.
- Razmatra se proces i model smetnje:

$$G(s)=\frac{200}{10s+1}\frac{1}{(0.05s+1)^2};\; G_d(s)=\frac{100}{10s+1}$$

- Zahtjevi na sintezu regulatora su: postizanje, po mogućnosti, dobrog otklanjanja utjecaja smetnje i frekvencija presjeka na karakteristici pojačanja treba biti oko 10 rad/s.
- **Rješenje**:
- Odabere se pojačanje petlje da bude $|G_s|=|G_d|$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Željeno ponašanje je definirano sa:

$$W_1 = \left|G^{-1}G_d\right|$$

- Nakon zanemarenje visokofrekvencijske dinamike u $\boldsymbol{G}(s)$ dobiva se inicijalna vrijednost težine $W_1 \approx 0.5$.
- Da bi se poboljšale performanse na niskim frekvencijama dodaje se integralno djelovanje, kao i element faznog prethođenja $s+2$ kojim se smanjuje nagib L-a od -2 na niskim frekvencijama do oko -1 na frekvenciji presjeka.
- Da bi se odziv učinio malo bržim, pojačanje se množi faktorom 2 da bi se dobila težina:

$$W_1 = \frac{s+2}{s}$$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Ovo djelovanje proizvodi oscilatoran odziv.
- Na ovaj način se dobije oblikovani proces $G_s = GW_1$ sa frekvencijom presjeka 13.7 rad/s.
- Amplituda od $G_s(j\omega)$ prikazan je na slajdu 67. isprekidanom linijom.
- Odziv sistem na jediničnu skokovitu smetnju sa regulatorom $K = W_1$ prikazan je također isprekidanom linijom na drugoj slici, za koga se očekivalo da će biti oscilatoran.
- Navedeni rezultati su dobiveni sa dizajnom inicijalnog oblikovanja petlje.
- Da bi se poboljšali rezultati, pomenuti regulator se nastoji učiniti robusnijim na način da tolerira H_∞ koprim faktor neizvjesnosti što je moguće više.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Za ovo se koristi Matlabova funkcija *coprimeunc*, koja pronalazi optimalan regulator koji robusno poboljšava oblikovani proces u smislu toleriranja neizvjesnosti maksimuma koprim faktora korištenog u proceduri H_∞ oblikovanja petlje po McFarlane – Gloveru.
- Maksimalno osiguranje stabilnosti dobiveno sa poboljšanim regulatorom $K = W_1 K_s$ (izračunato korištenjem Matlabove funkcije *ncfsyn*) iznosi $\gamma_{\min} = 2.34$, odnosno $\varepsilon_{\max} = 0.43$.
- Nakon toga uzeti $\gamma = 1.1\gamma_{\min}$ i odrediti korespondentni robusni regulator K_s.

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- U ovom primjeru dobivene su sljedeće funkcije prijenosa procesa i regulatora (regulator K_s i proces G_s imaju po 4 stanja, regulator $K = W_1 K_s$ pet stanja, W_1 jedno stanje):

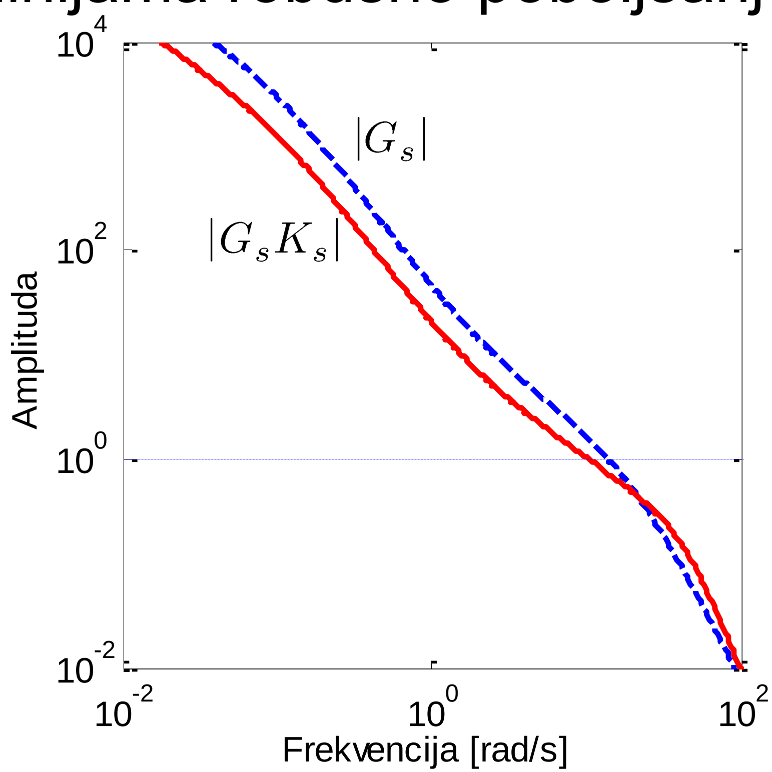
$$G_s(s) = \frac{200s + 400}{0.025s^4 + 1.002s^3 + 10.1s^2 + s}$$

$$K_s(s) = \frac{143.6s^3 + 6201s^2 + 73450s + 103900}{s^4 + 126.8s^3 + 5810s^2 + 132900s + 243300}$$

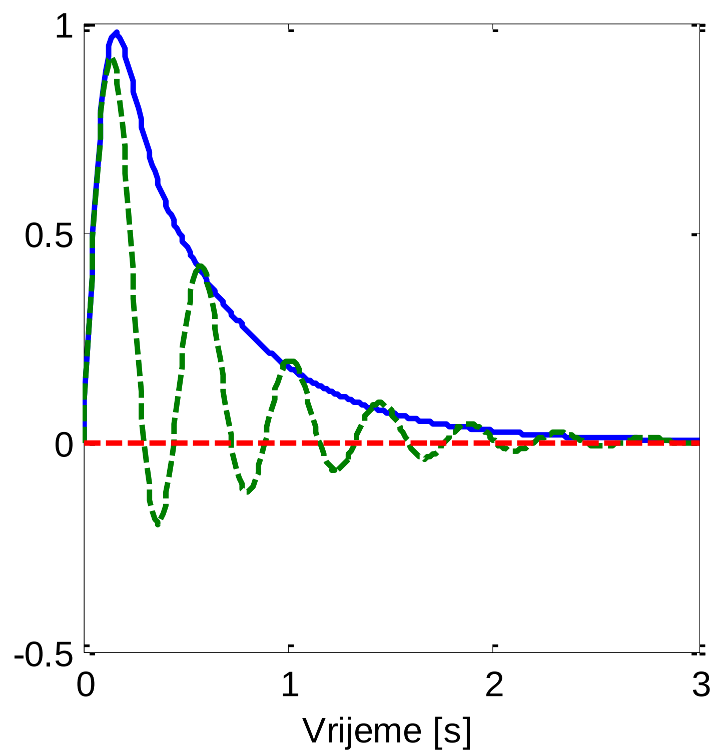
$$K(s) = \frac{143.6s^4 + 6488s^3 + 85850s^2 + 250800s + 207800}{s^5 + 126.8s^4 + 5810s^3 + 132900s^2 + 243300s}$$

Sinteza H_∞ regulatora oblikovanjem petlje

- Rezultati provedene procedure prikazani su na slikama.
- Isprekidanim linijama prikazani su rezultati za inicijalni dizajn oblikovanja procesa (G_s), a punim linijama robusno poboljšanje oblikovanja (G_sK_s).



Oblikovanje petlji $|L(j\omega)|$



Odziv na smetnju (jedinični skok)